# Chapitre 17 : Espaces vectoriels

## Table des matières

Notation : $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

# 1 Espaces vectoriels

## 1.1 Définition

**Définition 1.1** ($\mathbb{K}$-espace vectoriel)

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou espace vectoriel sur $\mathbb{K}$) est un triplet $(E, + , \cdot)$ où $E$ est un ensemble, $+ : E \times E \mapsto E$ est une loi de composition interne et $. : \mathbb{K} \times E \mapsto E$ est une loi de composition externe vérifiant les propriétés ci-dessous.

La loi $+$ vérifie les propriétés suivantes :

Commutativité : $\forall (x,y) \in E^2$ , $x + y = y + x$.
Associativité : $\forall (x,y,z) \in E^3$ , $(x + y) + z = x + (y + z)$.
Existence d'un élément neutre : $\exists\, 0_E \in E$ tel que $\forall x \in E$ , $x + 0_E = x$.
Existence d'un symétrique : $\forall x \in E$ , $\exists y \in E$ tel que $x + y = 0_E$.

La loi . vérifie les propriétés suivantes :

Distributivité sur $+$ : $\forall (x,y) \in E^2$ , $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ , $\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$.
Distributivité sur $+_{\mathbb{K}}$ : $\forall x \in E$, $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ , $(\lambda +_{\mathbb{K}} \mu).x = \lambda.x + \mu.x$.
Compatibilité avec $1_{\mathbb{K}}$ : $\forall x \in E$ , $1_{\mathbb{K}}.x = x$.
Compatibilité avec $\times_{\mathbb{K}}$ : $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ , $\forall x \in E$ , $(\lambda \times_{\mathbb{K}} \mu).x = \lambda.(\mu.x)$.

Les éléments de $E$ sont appelés des vecteurs. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des scalaires. L'élément neutre pour la loi $+$ sur $E$ est noté $0_E$. Il est appelé vecteur nul.

Par abus de langage, on dit plus simplement que $E$ est un espace vectoriel (au lieu du triplet $(E, + , \cdot)$).
Par abus également, on n'écrit pas la loi $\cdot$ : on note $\lambda x$ au lieu de $\lambda \cdot x$.

**Remarque :** On peut définir la notion d'espace vectoriel sur n'importe quel corps $\mathbb{K}$.
Le programme des classes préparatoires se limite à $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

**Théorème 1.2** (produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels)

Soient $E_1 , \cdots , E_n$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (avec $n \in \mathbb{N}^*$).
Alors $E_1 \times \cdots \times E_n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec les loi $+$ et $\cdot$ définies de la manière suivante :

1. $\forall x = (x_1, \cdots ,x_n), y = (y_1, \cdots ,y_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ : $\quad x + y = (x_1 + y_1, \cdots ,x_n + y_n)$
2. $\forall x = (x_1, \cdots ,x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ : $\quad \lambda x = (\lambda x_1, \cdots ,\lambda x_n)$

**Remarque :** Le vecteur nul de cet espace vectoriel est le $n$-uplet $(0_{E_1}, \cdots ,0_{E_n})$.

**Cas particulier :** Si $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors $E^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$).

**Théorème 1.3** (espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel)

Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\Omega$ un ensemble non vide.
Alors $E^\Omega$ (ensemble des fonctions de $\Omega$ dans $E$) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec les lois $+$ et $\cdot$ définies de la manière suivante :

1. $\forall f,g \in E^\Omega$ : $\quad f + g$ est la fonction de $\Omega$ dans $E$ définie par $\omega \mapsto f(\omega) + g(\omega)$.
2. $\forall f \in E^\Omega$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ : $\quad \lambda f$ est la fonction de $\Omega$ dans $E$ définie par $\omega \mapsto \lambda f(\omega)$.

**Remarque :** Le vecteur nul de cet espace vectoriel est la fonction nulle $\omega \mapsto 0_E$.

**Cas particulier :** L'ensemble $E^\mathbb{N}$ des suites d'éléments de $E$ est un espace vectoriel.

## 1.2 Exemples : espaces vectoriels usuels

Les ensembles suivants sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels :

1. $\mathbb{K}^n$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$).
   Cas particuliers :
   - $\mathbb{R}^2$ représente l'ensemble des points ou des vecteurs du plan.
   - $\mathbb{R}^3$ représente l'ensemble des points ou des vecteurs de l'espace.
   - Pour $n = 1$ : $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, dans lequel la loi $\cdot$ n'est rien d'autre que la multiplication usuelle sur $\mathbb{K}$.
2. $\mathbb{K}^\Omega = \mathcal{F}(\Omega,\mathbb{K})$ : $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions de $\Omega$ dans $\mathbb{K}$ (pour $\Omega$ ensemble non vide quelconque).
   Cas particulier : $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ des suites d'éléments de $\mathbb{K}$.
3. $\mathbb{K}[X]$ : $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
4. $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (pour $n,p \in \mathbb{N}^*$) : $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices à $n$ lignes et $p$ colonnes.
5. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

**Remarque :** Un singleton (ensemble à 1 élément) peut être muni d'une structure d'espace vectoriel pour lequel les lois $+$ et $\cdot$ sont définies de manière triviale.
On dit qu'il s'agit de l'espace vectoriel nul ou trivial, qui est réduit à $\{0_E\}$.

## 1.3 Calculs dans un espace vectoriel

**Proposition 1.4** (propriétés de calcul dans un espace vectoriel)

Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $x$ et $y$ des vecteurs de $E$, $\lambda$ et $\mu \in \mathbb{K}$ des scalaires.

1. $0_\mathbb{K} x = 0_E$
2. $\lambda 0_E = 0_E$
3. $(-\lambda)x = \lambda(-x) = -(\lambda x)$ (que l'on peut donc noter $-\lambda x$ sans ambiguïté)
4. $\lambda x = 0_E$ si et seulement si $\lambda = 0_\mathbb{K}$ ou $x = 0_E$.
5. Si $\lambda \neq 0$ et $\lambda x = \lambda y$, alors $x = y$.
6. Si $x \neq 0_E$ et $\lambda x = \mu x$, alors $\lambda = \mu$.

**Définition 1.5** (vecteurs colinéaires)

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soient $x$ et $y$ deux vecteurs de $E$.
On dit que les vecteurs $x$ et $y$ sont <u>colinéaires</u> lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$.

**Remarques :**

1. Le vecteur nul est colinéaire avec n'importe quel vecteur.
2. Si $x$ et $y$ sont des vecteurs non nuls de $E$, ils sont colinéaires si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $x = \lambda y$.

**Définition 1.6** (combinaison linéaire)

Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $x$, $y$ des vecteurs de $E$.
Une <u>combinaison linéaire de $x$ et $y$</u> est un vecteur de $E$ qui est de la forme $\lambda x + \mu y$, où $\lambda$ et $\mu \in \mathbb{K}$.

Plus généralement, une combinaison linéaire de $n$ vecteurs $x_1, \dots, x_n$ est de la forme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

# 2 Sous-espaces vectoriels

## 2.1 Définition

**Définition 2.1** (sous-espace vectoriel)

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Un sous-espace vectoriel de $E$ est un ensemble $F$ tel que :

1. $F \subset E$ ;
2. $F$ contient $0_E$ ;
3. $F$ est stable par combinaison linéaire, *i.e.* : $\forall x,y \in F$, $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{K}$, $\lambda x + \mu y \in F$.

**Remarques :**

1. Un sous-espace vectoriel est aussi stable par combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs.
2. $E$ et $\{0_E\}$ sont toujours des sous-espaces vectoriels de $E$. Le sous-espace $\{0_E\}$ est appelé sous-espace nul.

**Variantes :**

1. On peut remplacer « $F$ contient $0_E$ » par « $F$ est non vide ».
2. On peut séparer la propriété de stabilité par combinaison linéaire en :
   (i) $F$ est stable par somme : $\forall x,y \in F$, $x + y \in F$
   (ii) $F$ est stable par la loi externe : $\forall x \in F$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda x \in F$
3. On peut remplacer la propriété de stabilité par combinaison linéaire par : $\boxed{\forall x,y \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ x + \lambda y \in F}$.

**Exemple 2.2 :** Soit $H = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ x + y + z = 0\right\}$. Montrer que $H$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

**Théorème 2.3** (un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel)

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$.
Alors $F$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, pour les lois $+$ et $\cdot$ induites sur $F$.

**Méthode :** *Pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, il est toujours plus simple de montrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel déjà connu.*

## 2.2 Exemples : sous-espaces vectoriels usuels

1. Dans $\mathbb{R}^2$, les droites passant par l'origine $0_{\mathbb{R}^2}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.
   De telles droites sont appelées droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ :
   - les droites passant par l'origine $0_{\mathbb{R}^3}$, appelées droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ ;
   - les plans passant par l'origine $0_{\mathbb{R}^3}$, appelés plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
3. Les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ :
   - l'ensemble des suites bornées ;
   - l'ensemble des suites convergentes.
4. Soit $I$ un intervalle non trivial. Les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^I$ :
   - l'ensemble des fonctions bornées sur $I$ ;
   - $\mathscr{C}^n(I,\mathbb{K})$ (ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur $I$) ;
5. $\mathbb{K}_n[X]$ (ensemble des polynômes de degré $\leqslant n$) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
6. $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ (ensembles des matrices symétriques et antisymétriques) sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
7. $\mathbb{R}$ et $\mathbf{i}\mathbb{R}$ sont des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

## 2.3 Sous-espace vectoriel engendré par une partie

**Théorème 2.4** (intersection de sous-espaces vectoriels)

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $I$ un ensemble non vide, et soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de $E$.
Alors $\displaystyle\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

**Cas particulier : intersection finie.** Si $F_1, \ldots, F_n$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$), alors $F_1 \cap \ldots \cap F_n$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

**Exemple 2.5 :** Soit $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ , } x+y+z=0 \text{ et } x-z=0\right\}$.
Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

**Définition 2.6** (sous-espace vectoriel engendré par une partie)

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $X$ une partie de $E$.
On appelle sous-espace vectoriel engendré par $X$, noté $\mathrm{Vect}(X)$, le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel contenant $X$.

*Démonstration de l'existence et de l'unicité de* $\mathrm{Vect}(X)$ *:*
*Existence :* On note $F$ l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de $E$ qui contiennent $X$.
Alors $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ d'après le théorème 2.4, et il est inclus dans tout sous-espace vectoriel contenant $X$ (par définition de $F$).
*Unicité :* Si $F$ et $F'$ sont deux sous-espaces vectoriels contenant $X$ et minimaux au sens de l'inclusion (parmi tous les sous-espaces vectoriels qui contiennent $X$), alors ils sont inclus l'un dans l'autre, donc égaux. □

**Remarques :**

1. $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$
2. Si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ qui contient $X$, alors $\mathrm{Vect}(X) \subset F$.

**Cas d'une partie finie :**
Lorsque $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, on note aussi $\mathrm{Vect}(X) = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{Vect}(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$.

**Théorème 2.7** (espace vectoriel engendré par un nombre fini de vecteurs)

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soient $x_1, \ldots, x_n \in E$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$).
Alors $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ est égal à l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ :

$$\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n) = \left\{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \ / \ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}\right\}$$

**Méthode :** *Pour montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel, il suffit de trouver des vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ tels que $F = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$.*

**Exemple 2.8 :** Montrer que $F = \left\{(x,y,-x) \text{ , } (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

**Cas particuliers : droites vectorielles et plans vectoriels**

**Définition 2.9** (droite vectorielle)

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une droite vectorielle de $E$ est un sous-espace vectoriel de $E$ qui est engendré par un vecteur non nul de $E$.

Dans ce cas, $\text{Vect}(x) = \{\lambda x \ / \ \lambda \in \mathbb{K}\}$ est aussi noté $\mathbb{K}x$.

**Définition 2.10** (plan vectoriel)

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un plan vectoriel de $E$ est un sous-espace vectoriel de $E$ qui est engendré par deux vecteurs non colinéaires de $E$.

## 2.4 Sommes de sous-espaces vectoriels

**Remarque :** Une union de deux sous-espaces vectoriels n'est pas forcément un sous-espace vectoriel.

**Exemple 2.11 :** Soit $F = \{(0,x) \ , \ x \in \mathbb{R}\}$ et soit $G = \{(x,0) \ , \ x \in \mathbb{R}\}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$. L'espace $F \cup G$ est-il un sous-espace vectoriel ?

**Définition 2.12** (sommes de deux sous-espaces vectoriels)

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soient $F$ et $G$ des sous-espaces vectoriels de $E$.
La somme de $F$ et $G$, notée $F + G$, est l'ensemble suivant :

$$F + G = \{u + v \ / \ u \in F, \ v \in G\}.$$

**Exemple 2.13 :** Soit $F = \{(0,x) \ , \ x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x,0) \ , \ x \in \mathbb{R}\}$. Déterminer $F + G$.

**Proposition 2.14** (la somme de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel)

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.
La somme $F + G$ est un sous-espace vectoriel de $E$. Plus précisément, $F + G = \text{Vect}(F \cup G)$.

**Remarque :** Il ne faut pas confondre $F + G$ et $F \cup G$.

1. $F \cup G$ n'est pas toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x \in F \cup G \Leftrightarrow (x \in F \text{ ou } x \in G)$.
2. $F + G$ est toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x \in F + G \Leftrightarrow \exists (u,v) \in F \times G$ tel que $x = u + v$.

## 2.5 Somme directe de sous-espaces vectoriels

**Remarque :** Tout élément $x$ de la somme $F + G$ se décompose sous la forme $x = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$. Il n'y a pas toujours unicité de cette décomposition.

**Exemple 2.15 :** Soit $F = \text{Vect}\left((1,0,-1),(0,1,-1)\right)$ et $G = \text{Vect}\left((1,0,1),(0,1,0)\right)$. Le vecteur $(1,2,1)$ appartient à $F + G$ avec au moins deux décompositions possibles : $(1,2,1) = \underbrace{(1,-2,1)}_{\in F} + \underbrace{(0,4,0)}_{\in G} = \underbrace{(-1,2,-1)}_{\in F} + \underbrace{(2,0,2)}_{\in G}$.

**Définition 2.16** (somme directe de deux sous-espaces vectoriels)

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soient $F$ et $G$ des sous-espaces vectoriels de $E$.
On dit que la somme $F+G$ est une somme directe lorsque la décomposition de tout vecteur de $F+G$ comme somme d'un élément de $F$ et d'un élément de $G$ est unique, c'est-à-dire :

$$\forall w \in F+G,\ \exists!(u\,,v) \in F \times G,\ w = u+v.$$

Dans ce cas, la somme $F+G$ est notée $F \oplus G$.

**Remarque :** Pour montrer qu'une somme est directe, on utilise plutôt la caractérisation suivante.

**Proposition 2.17** (caractérisation d'une somme directe de deux sous-espaces vectoriels)

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soient $F$ et $G$ des sous-espaces vectoriels de $E$.
On a l'équivalence suivante :

$$F \oplus G \Leftrightarrow F \cap G = \{0_E\}$$

**Exemple 2.18 :** Soit $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z=0\right\}$ et $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x=y=z\right\}$
Montrer que ces ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ en somme directe.

## 2.6 Sous-espaces supplémentaires

**Définition 2.19** (sous-espaces vectoriels supplémentaires)

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soient $F$ et $G$ des sous-espaces vectoriels de $E$.
On dit que les sous-espaces $F$ et $G$ sont supplémentaires lorsque tout vecteur de $E$ se décompose de manière unique comme somme d'un élément de $F$ et d'un élément de $G$, c'est-à-dire :

$$\forall w \in E,\ \exists!(u\,,v) \in F \times G,\ w = u+v.$$

**Proposition 2.20** (caractérisation des sous-espaces vectoriels supplémentaires)

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soient $F$ et $G$ des sous-espaces vectoriels de $E$.
$F$ et $G$ sont supplémentaires si et seulement si $E = F \oplus G$, c'est-à-dire :

1. $E = F+G$ ;
2. la somme $F+G$ est directe.

**Méthodes :** *Pour montrer que deux sous-espaces vectoriels de $E$ sont supplémentaires :*

1. *soit on montre que tout élément $x$ de $E$ se décompose de manière unique sous la forme $x = u+v$ avec $u \in F$ et $v \in G$ (raisonnement par analyse et synthèse) ;*
2. *soit on montre que* $\mathrm{Vect}(F \cup G) = E$ *et que* $F \cap G = \{0_E\}$.

**Exemple 2.21 :** Montrer que $\mathrm{Vect}(X)$ et $\left\{P \in \mathbb{K}[X],\ \displaystyle\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t = 0\right\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}[X]$.

# 3 Familles finies de vecteurs

Une famille finie de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ est un $n$-uplet $(v_1\,,\dots,v_n) \in E^n$, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.

## 3.1 Familles libres et liées

**Définition 3.1** (famille libre, famille liée)

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $(v_1\,, \dots, v_n)$ une famille finie de vecteurs de $E$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$).

- On dit que la famille $(v_1\,, \dots, v_n)$ est une <u>famille libre</u> lorsque la combinaison linéaire nulle des vecteurs $v_1\,, \dots, v_n$ est la combinaison linéaire triviale, c'est-à-dire :

$$\forall(\lambda_1\,, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_E \implies \forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i = 0$$

- On dit que la famille $(v_1\,, \dots, v_n)$ est une <u>famille liée</u> lorsqu'elle n'est pas libre, c'est-à-dire lorsqu'il existe une combinaison linéaire non triviale de ces vecteurs qui est nulle :

$$\exists(\lambda_1\,, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \backslash \{(0\,, \dots, 0)\},\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_E$$

**Remarques :**

1. Une famille contenant le vecteur nul, ou contenant plusieurs fois le même vecteur, est liée.
2. Une sous-famille d'une famille libre est libre. Une famille qui contient une famille liée est liée.

**Exemple 3.2 :** Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $((1,2,3),(4,5,6),(7,8,9))$ est liée car $1.(1,2,3) - 2.(4,5,6) + 1.(7,8,9) = (0,0,0)$.
Montrer que la famille $((1,2,3),(7,8,9),(12,13,4),(-2,-4,-6))$ est également liée.

**Exemple 3.3 :** Montrer que les familles suivantes sont libres :

1. Dans $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{F}_1 = ((1,4),(2,7))$.
2. Dans $E = \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathcal{F}_2 = (\cos, \sin)$.
3. Dans $E = \mathbb{R}[X]$, et $\mathcal{F}_3 = (X+5, X-1, (X-1)^2)$.
4. Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{F}_4 = ((u_n),(v_n))$ où $u_n = \mathrm{Arctan}(n)$ et $v_n = \mathrm{Arctan}(2n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Exemple 3.4 :** Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, notons $e_k$ le vecteur de $\mathbb{K}^n$ dont la $k$-ième composante vaut 1 et les autres valent 0. La famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est libre.

**Exemple 3.5 :** La famille $(E_{1,1}, \dots, E_{n,p})$ composée des matrices élémentaires de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est libre.

**Familles libres dans $\mathbb{C}$ :**
On rappelle que $\mathbb{C}$ peut être vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ou comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
La famille $(1,\mathbf{i})$ est libre dans $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et liée dans $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

**Proposition 3.6** (famille de deux vecteurs)

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $(v_1\,, v_2)$ une famille de vecteurs de $E$.

1. La famille $(v_1\,, v_2)$ est liée si et seulement si $v_1$ et $v_2$ sont colinéaires.
2. La famille $(v_1\,, v_2)$ est libre si et seulement si $v_1$ et $v_2$ sont non colinéaires.

**Proposition 3.7** (une famille de polynômes à degrés distincts est libre)

Soient $P_1\,, \dots, P_n$ des polynômes non nuls de degrés distincts de $\mathbb{K}[X]$.
Alors la famille $(P_1\,, \dots, P_n)$ est libre.

**Vocabulaire :** Si la famille des degrés $(\deg(P_1)\,, \dots,\ \deg(P_n))$ est strictement croissante ou strictement décroissante : on dit dans ce cas que la famille $(P_1\,, \dots, P_n)$ est <u>échelonnée en degré</u>.

**Exemple 3.8 :** La famille $(1,X,X^2,\dots,X^n)$ est libre dans $\mathbb{K}_n[X]$.

**Proposition 3.9** (unicité des coefficients pour une combinaison linéaire d'une famille libre)

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $(v_1\,,\dots,v_n)$ une famille finie de vecteurs de $E$ (avec $n\in\mathbb{N}^*$).
Si la famille $(v_1\,,\dots,v_n)$ est libre, alors :

$$\forall(\lambda_1\,,\dots,\lambda_n),(\lambda_1'\,,\dots,\lambda_n')\in\mathbb{K}^n,\ \sum_{i=1}^n\lambda_iv_i=\sum_{i=1}^n\lambda_i'v_i\implies\forall i\in[\![1,n]\!],\ \lambda_i=\lambda_i'$$

Autrement dit, si deux combinaisons linéaires de $v_1\,,\dots,v_n$ sont égales, alors les coefficients sont égaux.

**Proposition 3.10** (somme directe d'espaces vectoriels engendrés par les vecteurs d'une famille libre)

Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $k$ et $n\in\mathbb{N}^*$ tels que $k\leqslant n$ et $(v_1,\dots,v_n)$ une famille libre de $E$.
Les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_k)$ et $\mathrm{Vect}(v_{k+1},\dots,v_n)$ sont en somme directe.

**Proposition 3.11** (ajout d'un vecteur à une famille libre)

Soit $(v_1,\dots,v_n)$ une famille libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ (avec $n\in\mathbb{N}$), et soit $w$ un vecteur de $E$.
La famille $(v_1,\dots,v_n,w)$ est libre si et seulement si $w\notin\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_n)$.

**Conséquence :** Une famille de trois vecteurs $(v_1\,,v_2\,,v_3)$ est libre si et seulement si $v_1$ et $v_2$ ne sont pas colinéaires et $v_3$ n'appartient pas à $\mathrm{Vect}(v_1\,,v_2)$.

## 3.2 Familles génératrices

**Définition 3.12** (famille génératrice)

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $(v_1\,,\dots,v_n)$ une famille finie de vecteurs de $E$ (avec $n\in\mathbb{N}^*$).
On dit que la famille $(v_1\,,\dots,v_n)$ est une famille génératrice de $E$ lorsque $E=\mathrm{Vect}(v_1\,,\dots,v_n)$.

Autrement dit, $(v_1\,,\dots,v_n)$ est une famille génératrice de $E$ si et seulement si tout vecteur de $E$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $v_1\,,\dots,v_n$, *i.e.* $\forall v\in E$, $\exists(\lambda_1\,,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$, $v=\displaystyle\sum_{i=1}^n\lambda_iv_i$.

**Remarques :**
- Une famille de $E$ qui contient une famille génératrice est encore génératrice.
- Pour une famille infinie, on dit que $(v_i)_{i\in I}$ est génératrice de $E$ lorsque $E=\mathrm{Vect}((v_i)_{i\in I})$.

**Exemple 3.13 :** La famille $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est génératrice de $\mathbb{K}^n$.

**Exemple 3.14 :** La famille $(E_{1,1},\dots,E_{n,p})$ est génératrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

**Exemple 3.15 :** La famille $(1,X,X^2,\dots,X^n)$ est génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.

**Familles génératrices dans $\mathbb{C}$ :**
On rappelle que $\mathbb{C}$ peut être vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ou comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
La famille $(1,\mathbf{i})$ est génératrice dans $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et dans $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
La famille $(1)$ est génératrice dans $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel mais ne l'est pas dans $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

## 3.3 Bases et coordonnées

**Définition 3.16** (base)

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille finie de vecteurs de $E$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$).
On dit que la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de $E$ lorsqu'elle est à la fois libre et génératrice de $E$.

**Théorème 3.17** (caractérisation d'une base et coordonnées dans une base)

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille finie de vecteurs de $E$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$).
La famille $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de $E$ si et seulement si tout vecteur de $E$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \dots, v_n$ :

$$\forall v \in E,\ \exists!(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

Dans ce cas, on appelle coordonnées du vecteur $v$ dans cette base les uniques scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

**Remarque :** Le caractère générateur fournit l'existence et la liberté fournit l'unicité.

**Bases canoniques :**

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle base canonique de $\mathbb{K}^n$ la base $(e_1, \dots, e_n)$, où, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $e_k$ est le vecteur de $\mathbb{K}^n$ dont la $k$-ième composante vaut 1 et les autres valent 0. Dans cette base, les coordonnées d'un vecteur $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ sont ses composantes $x_1, \dots, x_n$.
2. Soit $n,p \in \mathbb{N}^*$. On appelle base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la base $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$.
   Dans cette base, les coordonnées d'une matrice $A = (a_{i,j})$ sont ses coefficients $a_{1,1}, \dots, a_{n,p}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ la base $(1, X, X^2, \dots, X^n)$.
   Dans cette base, les coordonnées d'un polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}_n[X]$ sont ses coefficients $a_0, \dots, a_n$.

**Exemple 3.18 :** Montrer que la famille $((1,1,1),(1,1,0),(0,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ puis déterminer les coordonnées du vecteur $(2,-5,2)$ dans cette base.